Módulo 06

Norma IEEE-754 (Pt. 2)

Organización de Computadoras
Depto. Cs. e Ing. de la Comp.
Universidad Nacional del Sur

Copyright

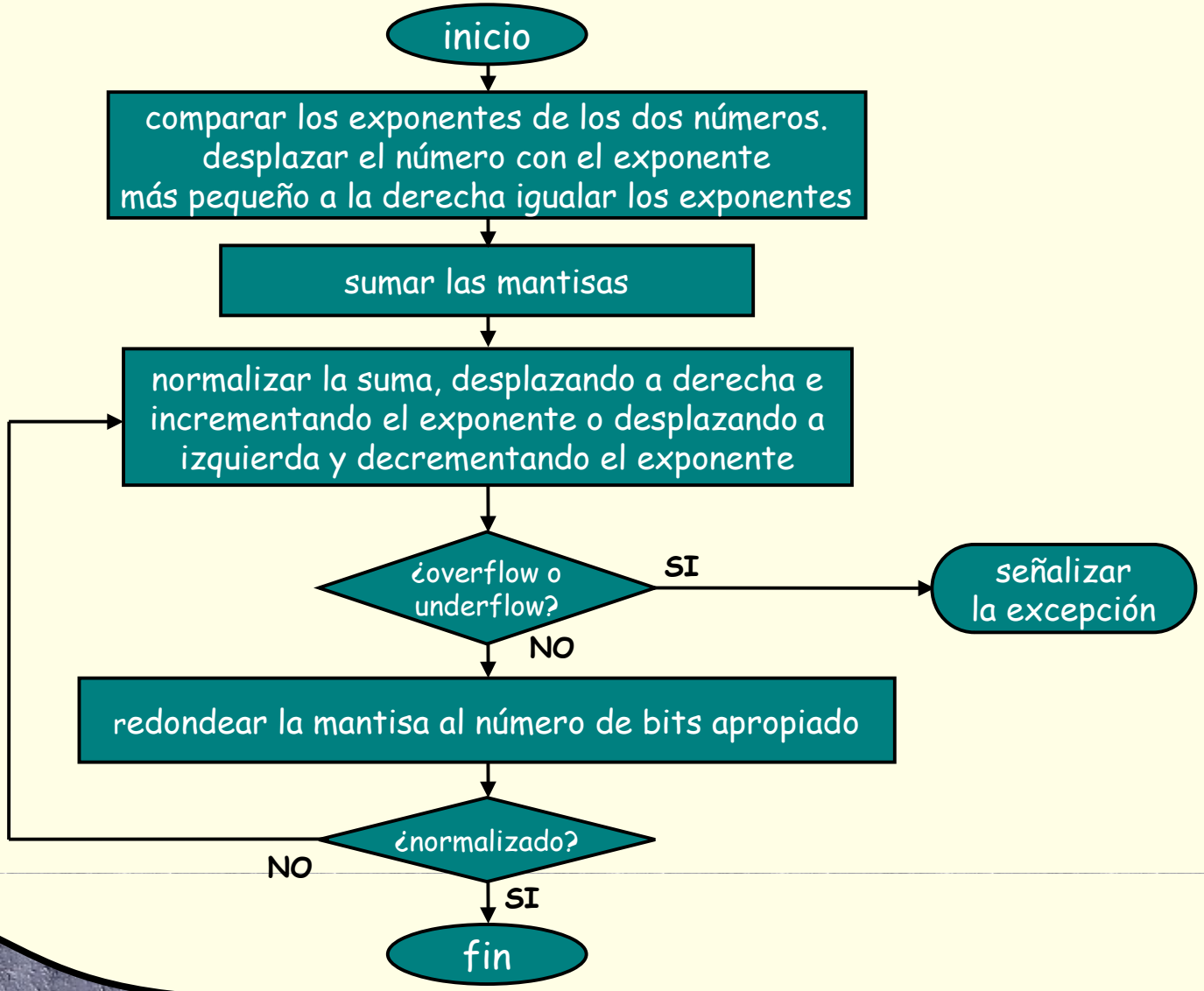
Contenidos

- Teoría de redondeo
- Redondeos óptimos y simétricos
- Norma **IEEE-754**
- Formatos contemplados
- Concepto de denormal
- Implementación de las operaciones básicas
- Redondeos en la norma
- Consideraciones al implementar en **HW**

Suma en la norma

- Algoritmo básico para la suma de dos números en la norma **IEEE-754**:
  - Alinear los puntos decimales (“desnormalizando” a uno de los operandos de forma tal que ambos exponentes sean iguales), para esto se desplaza a la derecha la mantisa con el exponente más pequeño
  - Sumar las mantisas
  - Normalizar el resultado, verificando el eventual overflow en el exponente
  - Redondear el resultado al número correcto de dígitos significativos

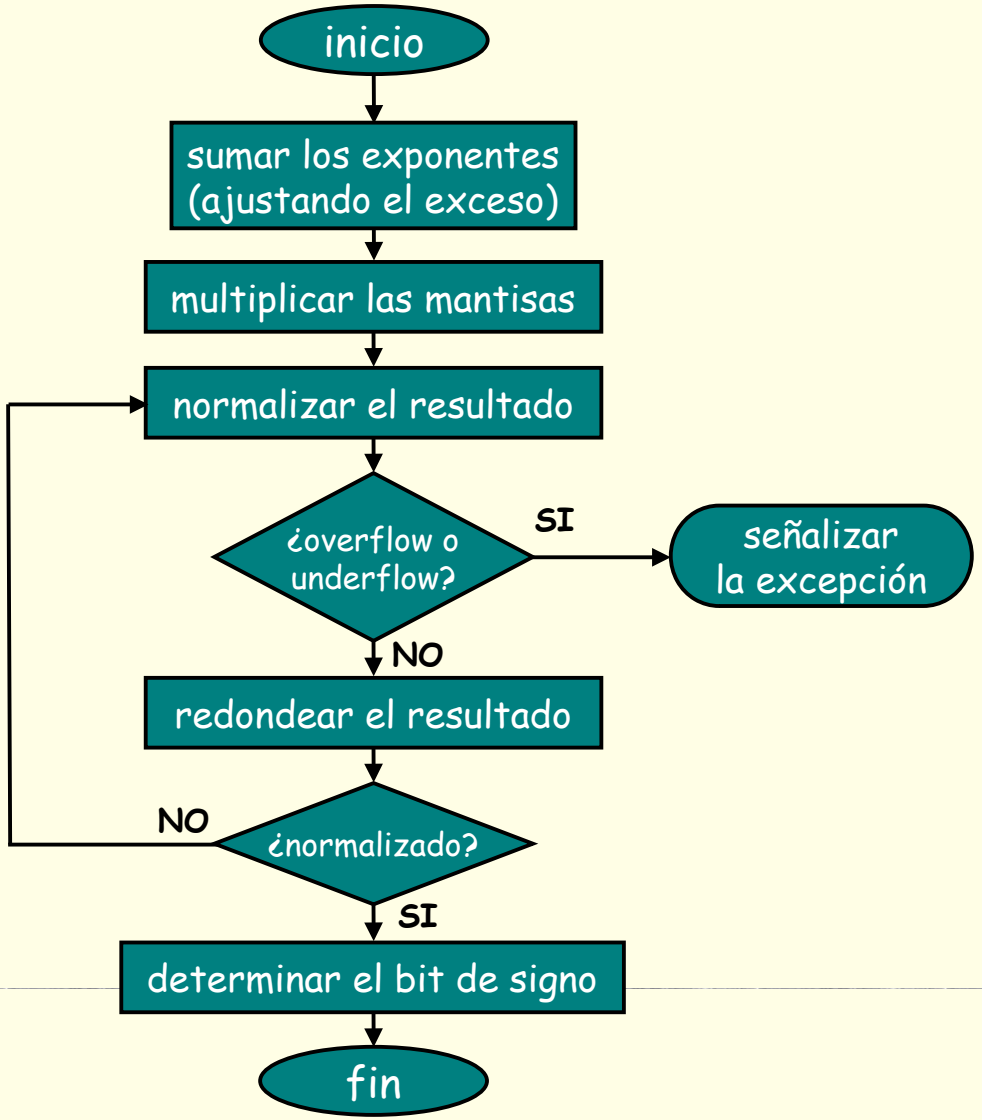
Suma en la norma



Multiplicación en la norma

- Algoritmo básico para la multiplicación de dos números en la norma **IEEE-754**:
  - Sumar los exponentes, compensando el exceso
  - Multiplicar las mantisas
  - Normalizar el resultado y comprobar si se produjo overflow
  - Redondear la respuesta al número correcto de dígitos significativos
  - Normalizar nuevamente en caso de ser necesario
  - Determinar el signo del resultado

Multiplicación en la norma



Redondeos en la norma

- La norma **IEEE-754** contempla cinco modalidades de redondeo, a saber:
  - Hacia arriba (hacia $+\infty$)
  - Hacia abajo (hacia $-\infty$)
  - Hacia el cero (truncado)
  - Proximidad unbiased (hacia los pares)
  - Proximidad biased (hacia afuera del cero)
- Estas modalidades de redondeo requieren el uso de bits adicionales de precisión

Bits de guarda

- Denominaremos bits de guarda a los bits de precisión adicionales a la derecha del bit menos significativo:
  - Los bits de guarda son conservados temporalmente hasta que sean requeridos
  - Usualmente son empleados en la normalización y resultan fundamentales durante el redondeo
  - La norma **IEEE-754** contempla tres bits de guarda, denominados guard (**G**), round (**R**), y sticky (**S**)
  - Nótese que esto implica que la **ALU** debe ensancharse en tres bits

Bits de guarda

- La norma **IEEE-754** al hacer un uso acertado de los bits de guarda logra obtener el mismo resultado que se hubiera obtenido al hacer uso de una precisión infinita
- En otras palabras, con sólo tres bits de guarda se puede computar el mismo resultado que se obtendría al operar sobre la totalidad de los bits de los operandos

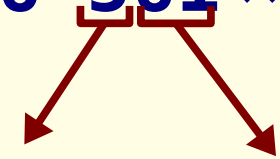
Round y sticky

- Por caso, analicemos cómo a través de sólo dos bits de guarda se puede obtener el redondeo correcto en la siguiente suma con una precisión de dos dígitos decimales:

$$x_1 + x_2 = 2.561 \times 10^0 + 2.34 \times 10^2$$

$$x_1 \times x_2 = 0.02561 \times 10^2 + 2.34 \times 10^2$$

$$x_1 \times x_2 = 2.36\ 561 \times 10^2$$



$$R = 5 \quad S \neq 0$$

Round y sticky

- Contando con estos dígitos de guarda, es posible implementar un correcto redondeo:
  - Para $0 \leq R < 5$ se redondea para abajo
  - Para $5 < R \leq 9$ se redondea para arriba
  - Para $R = 5$, se mira el estado de **S**
- Con respecto al sticky, sólo importa si es cero o no (independientemente de cuál sea la base)
  - En la norma **IEEE-754**, **S** se calcula haciendo **OR** entre todos los bits descartados (esto es, los que no forman parte del resultado ni tampoco de **G** ni **R**)

Round y sticky

- La siguiente tabla resume el rol de los bits **R** y **S** en los distintos esquemas de redondeo (donde p_0 es el valor del dígito menos significativo):

redondeo	**resultado** ≥ 0	**resultado** < 0
hacia $-\infty$		**+1 LSB** si **(R OR S)**
hacia $+\infty$	**+1 LSB** si **(R OR S)**	
hacia el **0**		
proximidad hacia pares	**+1 LSB** si **((R AND p_0) OR (R AND S))**	**+1 LSB** si **((R AND p_0) OR (R AND S))**
proximidad afuera del **0**	**+1 LSB** si **R**	**+1 LSB** si **R**

Round y sticky

- A manera de ejemplo, veamos como se aplican estos esquemas a la hora de redondear a un dígito de precisión los siguientes números:

redondeo	**+1.400**	**-1.600**	**+1.500**	**-2.500**	**+2.502**
hacia −∞	**+1**	**-2**	**+1**	**-3**	**+2**
hacia +∞	**+2**	**-1**	**+2**	**-2**	**+3**
hacia el **0**	**+1**	**-1**	**+1**	**-2**	**+2**
prox. a pares	**+1**	**-2**	**+2**	**-2**	**+3**
prox. fuera **0**	**+1**	**-2**	**+2**	**-3**	**+3**

Round y sticky

- Finalmente, veamos en concreto cómo con sólo los bits **R** y **S** se obtiene el mismo resultado al redondear que al usar precisión infinita
  - Cálculo con precisión infinita:

$$x_1 = 1.001000 \times 2^3$$

$$x_2 = +1.101001 \times 2^{-1}$$

$$\begin{array}{rl} 1.001000 & \times 2^3 \\ +0.0001101001 & \times 2^3 \\ \hline 1.0011101001 & \times 2^3 \end{array}$$

$$1.001111 \times 2^3$$

Round y sticky

- Continúa:
  - Cálculo usando sólo round y sticky:

$$x_1 = 1.001000 \times 2^3$$

$$x_2 = +1.101001 \times 2^{-1}$$

$$1.001000 \times 2^3$$

$$+0.00011011 \times 2^3$$

$$1.00111011 \times 2^3$$

$$R = 1$$

$$S = 0 \text{ OR } 0 \text{ OR } 1 = 1$$

$$1.001111 \times 2^3$$

Rol del bit guard

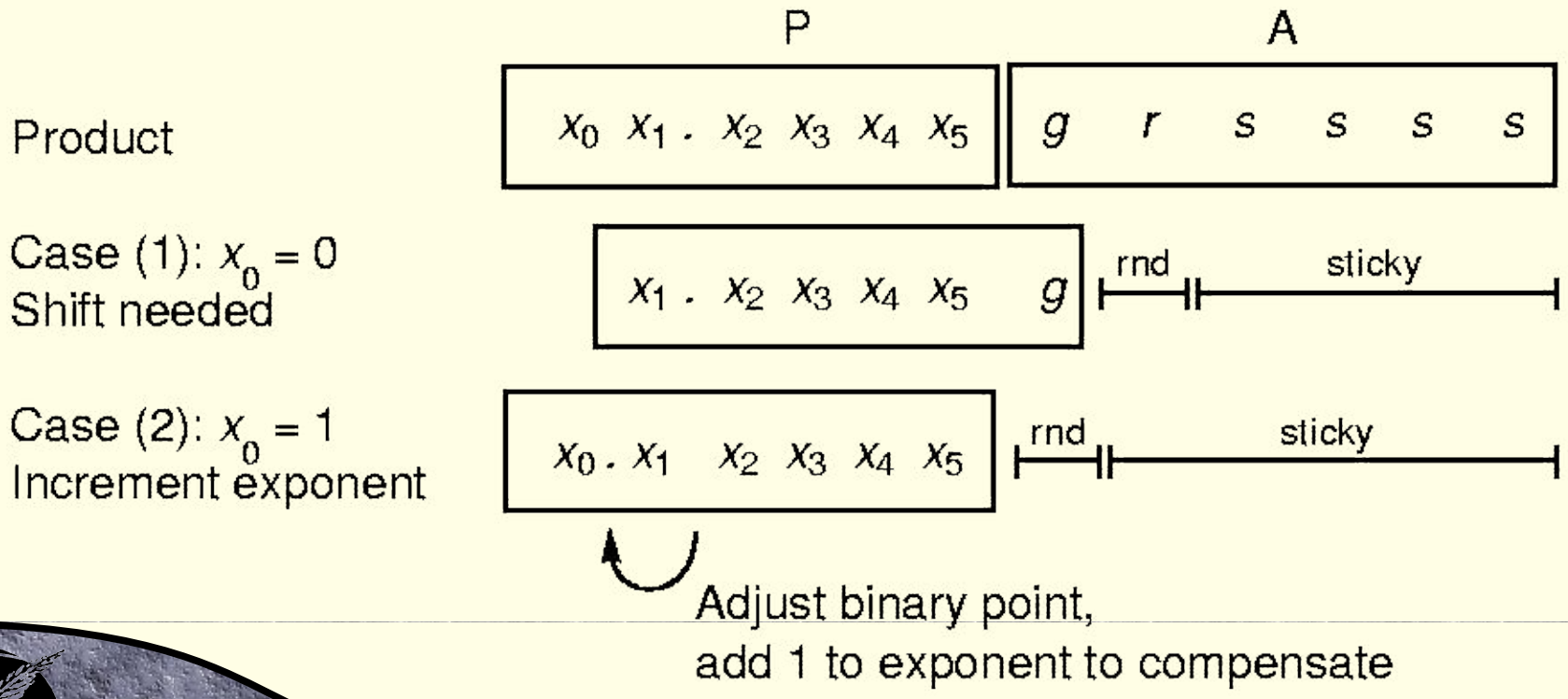
- Si **R** y **S** se usan para redondear, ¿para qué se usa el tercer bit de guarda, el bit **G**?
  - El bit **G** se emplea al normalizar el resultado preliminar de las operaciones aritméticas, esto es, antes de aplicar el redondeo
  - En los casos en que no haga falta usar el bit **G**, se deben ajustar los valores de los bits **R** y **S** de la siguiente manera:

$$R_{nuevo} = G_{anterior} \text{ OR } S_{anterior}$$

$$S_{nuevo} = R_{anterior} \text{ OR } S_{anterior}$$

Rol del bit guard

- En la multiplicación, el rol del bit **G** se torna aparente cuando el bit más significativo del resultado preliminar es cero:



Implementación en HW

- Hasta ahora hemos repasado los algoritmos de las operaciones básicas haciendo hincapié en familiarizarnos con los mismos
- Naturalmente a la hora de implementar estos algoritmos en hardware surgen otras consideraciones:
  - Alcanzar un desempeño altamente eficiente (no tomar decisiones que comprometan el desempeño)
  - Minimizar la cantidad de hardware necesario (reusar en la medida de lo posible el hardware disponible)

Implementación en HW

- Concretamente, la implementación en hardware de estos algoritmos capitalizará los beneficios de las distintas representaciones ya vistas:
  - Por caso, no tiene sentido contar con un circuito para sumar y otro independiente para la resta cuando se puede sacar provecho de las representaciones complementarias
  - Nótese que si bien la norma establece que la mantisa se representa en **SM**, ¡nada impide a la **ALU** que cambie internamente la representación de los operandos!

Algoritmo para la suma

- A continuación repasaremos un algoritmo para la suma en punto flotante el cual incorpora la mejora antes comentada
- Sea $x_1 = (e_1, m_1)$ y $x_2 = (e_2, m_2)$ los dos operandos que se desean sumar:
  - Comparar los exponentes. En caso de que $e_1 < e_2$ intercambiar los operandos, a fin de que la diferencia $d = e_1 - e_2$ no sea negativa (será cero o positiva)
  - Si los signos de x_1 y x_2 difieren, reemplazar la mantisa m_2 por su complemento a dos

Algoritmo para la suma

- Continúa:
  - Colocar m_2 en un registro de desplazamiento y correr **d** lugares a la derecha. De los bits que se descartan por el extremo derecho armar los bits **G**, **R** y **S**
  - Computar el resultado preliminar $S = m_1 + m_2$. Si los signos de los operandos son distintos y no hay carry de salida, reemplazar a **S** por su complemento a dos
  - Normalizar a **S** de acuerdo al siguiente detalle: si los signos de los operandos son iguales y hay carry de salida, desplazar a **S** un lugar a la derecha, ingresando el **1** del carry (hubo overflow virtual)

Algoritmo para la suma

- Continúa:
  - Caso contrario, desplazar **S** a la izquierda hasta obtener una mantisa normalizada. Nótese que el primer desplazamiento hace ingresar a **G**, pero los restantes deben ingresar ceros
  - En todos los casos, ajustar el exponente en función de la cantidad de desplazamientos realizados
  - Ajustar **R** y **S** en caso de ser necesario, es decir, si **G** no pasó a formar parte de la mantisa en el último paso, hacer **R = G** y **S = R OR S**

Algoritmo para la suma

- Continúa:
  - Aplicar el redondeo elegido en función de los valores de los bits **R** y **S**. En caso de producirse carry out, desplazar la mantisa del resultado a derecha, ajustando el exponente de manera acorde
  - Computar el signo del resultado. Si ambos operandos tienen el mismo signo, ese será el signo del resultado
  - En caso contrario, se debe tener en cuenta cuál de los dos operandos era negativo, si se intercambiaron los operandos en el primer paso y de si se dos complementó el resultado preliminar

Algoritmo para la suma

- Los distintos parámetros que deben ser tenidos en cuenta a la hora de determinar el signo del resultado pueden resumirse en la siguiente tabla:

¿hubo swap?	¿se comp.?	signo(x_1)	signo(x_2)	signo(S)
SI		+	-	-
SI		-	+	+
NO	NO	+	-	+
NO	NO	-	+	-
NO	SI	+	-	-
NO	SI	-	+	+

Ejemplo

- Calcular la siguiente suma, haciendo uso del redondeo por proximidad unbiased

$$x_1 = +1.11111111111111111111111 \times 2^{45}$$
$$x_2 = +1.10100100000000000000000 \times 2^{21}$$

} $d = 24$

$$\begin{array}{rl} 1.11111111111111111111111 & \times 2^{45} \\ +0.00000000000000000000000111 & \times 2^{45} \\ \hline 1.11111111111111111111111111 & \times 2^{45} \end{array}$$

GRS

el resultado preliminar está normalizado,
G no será usado en esta ocasión

Ejemplo

- Continúa:

R = **1** y **S** = **1**
sumo **1 LSB**

$$\begin{array}{r} 1.11111111111111111111111 \times 2^{45} \\ +\ 0.00000000000000000000001 \times 2^{45} \\ \hline 10.00000000000000000000000 \times 2^{45} \end{array}$$

nótese que luego de aplicar el redondeo
elegido el resultado dejó de estar normalizado

$$X_1 + X_2 = +1.00000000000000000000000 \times 2^{46}$$

Ejemplo

- Calcular la siguiente suma, haciendo uso del redondeo por proximidad unbiased

$$x_1 = +1.01000000110100110100000 \times 2^{16}$$
$$x_2 = -1.11001001101000011001000 \times 2^{16}$$

$d = 0$

$$\begin{array}{rl} 1.01000000110100110100000 & \times 2^{16} \\ +0.00110110010111100111000000 & \times 2^{16} \\ \hline 1.01110111001100011011000000 & \times 2^{16} \end{array}$$

GRS

el resultado preliminar es negativo (no hubo carry), se debe complementar y se hará uso del bit **G**

Ejemplo

- Continúa:

luego de complementar, se normaliza

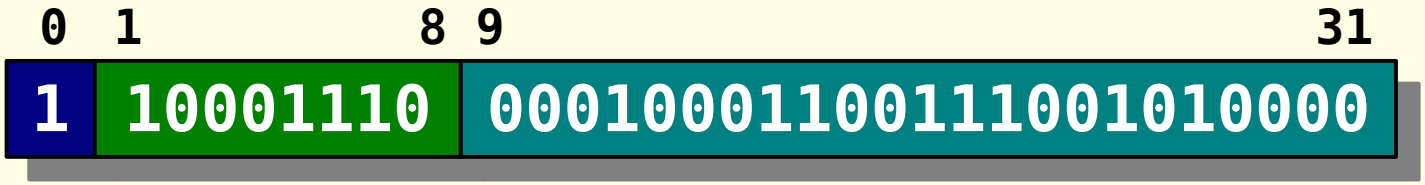
$$0.10001000110011100101000000 \times 2^{16}$$

al normalizar, el bit **G** ingresa a la mantisa en el primer corrimiento

R = **0** y **S** = **0** no se suma nada

$$1.00010001100111001010000 \times 2^{15}$$

$$x_1 + x_2 = -1.00010001100111001010000 \times 2^{15}$$



para determinar el signo del resultado se tiene en cuenta que no hubo swap y que se complementó

Ejemplo

- Calcular el siguiente producto trabajando con sólo 9 bits de precisión, haciendo uso del redondeo hacia $-\infty$

$$x_1 = +1.01000000 \times 2^{-5}$$
$$x_2 = -1.10001001 \times 2^{32}$$

ajustar con cuidado la posición del punto binario del resultado preliminar

```
   1.01000000
 × 1.10001001
 ------------
   101000000
  101000000
 101000000
+ 101000000
 ------------
01.111010101000000
```

determinar **G**, **R** y **S** a partir de los bits descartados

```
01.1110101101
        GRS
```

Ejemplo

- Continúa:

falta un bit, se debe hacer uso de **G**

$$01.1110101101 \times 2^{27}$$

los exponentes se suman

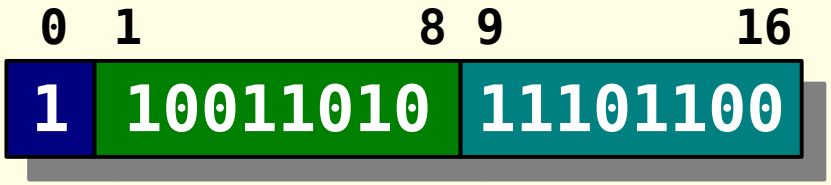
al normalizar, el bit **G** pasa a formar parte de la mantisa

R = 0 y **S = 1**
sumo **1 LSB**
(pues es **<0**)

$$1.11101011 \times 2^{27}$$

el exponente no cambia al ingresar **G**

$$x_1 \times x_2 = -1.11101100 \times 2^{27}$$



Ejemplo

- Calcular el siguiente producto trabajando con sólo 9 bits de precisión, haciendo uso del redondeo hacia el **0**

$$x_1 = +1.01000000 \times 2^{86}$$
$$x_2 = +1.10001001 \times 2^{12}$$

ajustar con cuidado la posición del punto binario del resultado preliminar

```
      1.11000011
    × 1.10100001
    ------------
      111000011
     111000011
    111000011
+  111000011
-----------------
 10.1101111010100011
```

determinar **G**, **R** y **S** a partir de los bits descartados

```
10.1101110011
        GRS
```

Ejemplo

- Continúa:

no normalizado,
no se hará uso de **G**
(ajustar **R** y **S**)

$$10.1101110011 \times 2^{98}$$

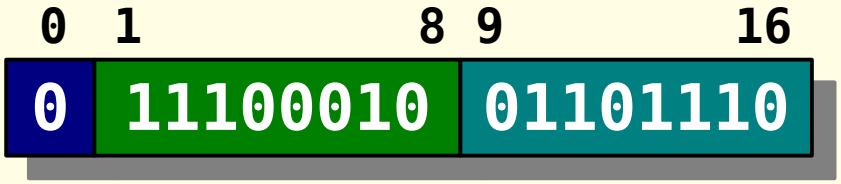
los exponentes
se suman

no se suma nada
(pues truncamos)

$$1.01101110 \times 2^{99}$$

correr la coma
a izquierda y
ajustar el exponente

$$x_1 \times x_2 = +1.01101110 \times 2^{99}$$



¿Preguntas?